Mødet den 29de Januar.

Herr Vandinspecteur, nu Stadsingenieur, *Colding* meddeelte

Undersøgelse over de uundgaaelige Observationsfeils sandsynlige Størrelse og Natur.

Under Udførelsen af et større Nivellementsarbeide, som i Aaret 1855 blev mig overdraget i Anledning af de nye Vand-, Gas- og Cloakanlæg her i Kjøbenhavn, blev jeg ført ind paa den nærværende Række af Undersøgelser, som jeg troer bedst at kunne tydeliggjøre ved at give et Overblik saavel over hiint Arbeides Beskaffenhed som over de Betragtninger, hvortil det gav mig Anledning.

Mangelen paa faste Høidepunkter i Staden havde alt temmelig længe og ved forskjellige Leiligheder været følt, og da det igjen under Udførelsen af de nye Vand- og Gasværker fandtes særdeles ønskeligt at have saadanne Høidepunkter jevnt fordeelte over hele Staden, og det med Hensyn paa Udarbeidelsen af en detailleret Plan til et Cloaksystem for Kjøbenhavn, som ligeledes forelaa, var absolut nødvendigt at have en detailleret Kundskab om Terrainets Høidebeliggenhed og Heldning, saa blev jeg anmodet om at lade udføre et saavidt muligt nøiagtigt Nivellement til Bestemmelsen af Høidebeliggenheden af et tilstrækkeligt stort Antal faste Punkter, nogenlunde jevnt fordeelte over hele Staden, fra hvilke Punkter man da senere i ethvert mødende Tilfælde kunde gaae ud ved den mere detaillerede Bestemmelse af det omliggende Terrains Høidebeliggenhed over dagligt Vande i Stranden.

Jeg lod da paa passende Steder indmure ialt 131 Stykker faste Nivellements-Plader i de forskjellige offentlige og private Bygninger, og Nivellementet, som udgik fra Nulpunktet paa Vandmærket paa Gammelholm, blev derpaa efterhaanden udstrakt til alle disse Punkter, idet Beliggenheden af ethvert følgende Punkt blev bestemt i Forhold til det Foregaaende ved Middeltallet af mindst tre samstemmende Nivellementer, der ikke maatte afvige mere end 0,02 Fod fra hinanden indbyrdes. Efter paa denne Maade at have bestemt Høideforskjellen

a_1 imellem Nulpunktet og den første Nivellementsplade
a_2 — den første og den anden —
a_3 — den anden og den tredie —
a_4 — den tredie og den fjerde —
o. s. v.

kunde Høiden h_r over Nulpunktet (dagligt Vande) let findes for et hvilketsomhelst af de 131 faste Nivellementspunkter — i Almindelighed for det r^{te} Punkt — ved Addition af de enkelte Høidedifferentser, idet disse betragtedes som positive eller negative eftersom Høiden af det følgende Punkt var større eller mindre end Høiden af det Foregaaende.

Jeg bestemte altsaa Høiden h_r for det r^{te} Punkt ifølge Formlen

$$h_r = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_r, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

og den sandsynlige Feil f_r ved denne Bestemmelse vilde jeg i Henhold til den almindelige Theori have kunnet beregne ved Hjælp af Formlen

$$f_r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots u_r^2}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

hvor $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_r$ betegner de sandsynlige Feil, som hefte ved Størrelserne $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_r$.

Til Bestemmelsen af den Feil u, som maa antages at hefte ved Høideangivelsen for et følgende Punkt imod det Foregaaende, kunde jeg have benyttet den bekjendte Formel:

$$u = 0{,}6745 \,.\, \sqrt{(a-\alpha_1)^2 + (a-\alpha_2)^2 + \ldots (a-\alpha_p)^2}, \quad \ldots \quad (3)$$

hvor a betegner Middeltallet af alle de p enkelte Høidebestemmelser, hvis Værdier antages at være $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_p$.

Jeg kan imidlertid ikke undlade at bemærke, at det stedse har forekommet mig, at den almindelige Theori af de sandsynlige Feil, hvorefter ovenstaaende Formler ere fundne, lider af nogen Uklarhed, idet den for det første er bygget paa den

Forudsætning, at Summen af alle Observationsfeilene er lig Nul, hvilket i Almindelighed er urigtigt og kun tilnærmelsesviis finder Sted for et stort Antal af Observationer. Under den Forudsætning, at Summen af alle Feilene er lig Nul, finder man da som bekjendt, at Sandsynligheden for at begaae en Feil x, kan fremstilles ved

$$\varphi(x) = c \,.\, e^{-h^2 x^2},$$

hvor c og h ere constante Størrelser, der ere uafhængige af x og ere afhængige af Maaden, hvorpaa Iagttagelserne ere udførte. Derpaa bygger man nu videre, at den Sandsynlighed, som haves for at en Observationsfeil, ligger imellem Grændserne $\pm\, v$, kan fremstilles ved

$$\frac{c}{dx} \,.\, \int_{-v}^{+v} e^{-h^2 x^2} dx,$$

og udleder saa deraf, at da der er Vished for, at Feilen ligger imellem Grændserne $\pm \infty$, saa maa man have

$$\frac{c}{dx} \,.\, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 1 \text{ eller } c = \frac{h dx}{\sqrt{\pi}}.$$

Paa denne Maade kommer man til det Resultat, at Sandsynligheden for at en Observationsfeil skal have en vis bestemt Værdi x iblandt de uendelig mange uendeligt lidt forskjellige Værdier, som kunne tænkes beliggende imellem Grændserne $\pm \infty$, vil være fremstillet ved

$$\varphi(x) = \frac{h dx}{\sqrt{\pi}} \,.\, e^{-h^2 x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Herimod har jeg at bemærke, næst at denne Udvikling som sagt forudsætter et uendeligt stort Antal Observationsfeil, at den ogsaa forudsætter at Observationsfeilene kunne være uendelig store, noget, hvorom der jo ikke kan være Tale, naar der er Spørgsmaal om Bestemmelsen af den sande Værdi af endelige Størrelser.

Tænke vi os at alle Observationsfeilene ere beliggende imellem bekjendte endelige Grændser $\pm\, v$, saa maatte vi efter samme Princip være berettigede til at slutte, at

$$\frac{c}{dx} \cdot \int_{-v}^{+v} e^{-h^2 x^2} dx = 1;$$

den heraf følgende Værdi for c, der er større eller mindre eftersom Observationsfeilenes Grændser ($\pm v$) ere mindre eller større, — hvilket atter beroer paa, om Observationerne ere mere eller mindre nøiagtige, — vilde altsaa stedse være større end efter Formlen $c = \frac{hdx}{\sqrt{\pi}}$. Men deraf fremgaaer, som det synes mig, at Sandsynligheden for at have begaaet Feilen x, i Virkeligheden er større end efter Formlen (4), og at følgelig ogsaa Sandsynligheden for at Feilen ligger imellem Grændserne $\pm v$ vil være større end efter den almindelige Formel, samt endelig, at *den sandsynlige Feil* — den Værdi, som en Observationsfeil sandsynligviis ligesaa let vil overskride som underskride — vil være mindre end den for denne almindelig angivne Værdi (0,47694).

I det foreliggende Tilfælde stillede Sagen sig saa simpelt, at det hurtigt blev mig klart, at jeg maatte kunne løse den stillede Opgave — Bestemmelsen af den sandsynlige Feil ved de forskjellige Nivellementsplader — paa en let og sikker Maade uden Hjælp af den almindelige Theori om de sandsynlige Feil, og det er denne Udvikling, jeg først skal meddele.

Jeg skal til den Ende bemærke, at da enhver af de sandsynlige Feil ved Høidebestemmelsen af et følgende Punkt imod det Foregaaende ligesaa let kan være negativ, som positiv, saa er det indlysende af sig selv, at Summen af en heel Række, bestaaende af r sandsynlige Feil, fremstillet i sin fulde Almindelighed, maa skrives

$$\pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \ldots \pm u_r,$$

idet u_r almindeligt betegner den numeriske Værdi af den sandsynlige Feil ved Høidebestemmelsen af det r^{te} imod det $(r-1)^{te}$ Nivellementspunkt, og jeg skal derved strax tilføie den Oplysning, at det alene er paa den fundamentale Egenskab ved de sandsynlige Feil, — at disse Feil ligesaa let kunne være positive som negative og altsaa med lige Sandsynlighed kunne tillægges Fortegnet + som Fortegnet ÷, at jeg grunder nærværende Theori om de sandsynlige Feil. — At den sandsynlige Feil ligesaa let kan være positiv som negativ og omvendt, er aabenbart ikke noget særegent ved den her omhandlede Art af Maalninger; denne Egenskab vil, naar Alt vel overveies og alle Omstændigheder holdes ude fra hinanden, findes at være fælleds for alle sandsynlige Feil, idet man stedse, ved ethvert Forsøg paa at angive en Størrelse, som med Nøiagtighed kan træde istedetfor en anden, ligesaa let og derfor ogsaa ligesaa sandsynligt vil komme i det Tilfælde at angive en Størrelse, der er større end den virkelige, som en Størrelse, der er mindre end denne, saasandt man ikke er sikker paa at kunne bestemme den sande Værdi nøiagtigt. Man har nu vistnok heller ikke tidligere overseet denne Egenskab ved de sandsynlige Feil, da den som bekjendt netop danner den første af de Grundsætninger, hvorpaa den hidtilværende Theori om de sandsynlige Feil hviler; men det forekommer mig kun, at man ikke tilfulde har benyttet denne Egenskab ved de sandsynlige Feil.

Naar vi nu vende tilbage til det betragtede Tilfælde og for dette ville angive den virkelige Høideforskjel imellem det r^{te} og det $(r-1)^{te}$ Punkt, saa er det klart, at vi kunne fremstille denne Høideforskjel ved

$$A_r = a_r \pm u_v,$$

og Høiden af det r^{te} Punkt over Nulpunktet (dagligt Vande) vil følgelig kunne udtrykkes ved Formlen

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_r = hr + \Sigma\,(\pm u), \text{ idet} \\ \Sigma\,(\pm u) = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \ldots \pm u_r \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Hvilken Værdi vi nu skulle tillægge $\Sigma\,(\pm u)$, der fremstiller Summen af alle de enkelte sandsynlige Feil, det vide vi aabenbart ikke, og derfor kunne vi heller ikke nøiagtigt angive Værdien af Udtrykket (5). Vi maae altsaa indskrænke os til at bestemme den sandsynligste Værdi for $\Sigma\,(\pm u)$ og jeg skal da foreløbigeu bemærke, at det let sees, at enhver af de mulige Værdier for denne søgte Feil maa være beliggende imellem Grændserne:

$$\Sigma(\pm u) = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_r) \text{ og}$$

$$\Sigma(\pm u) = -(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_r),$$

idet det vel er muligt, skjøndt naturligviis kun lidet sandsynligt, at de enkelte Feil *(u)* alle skulle være positive eller alle skulle være negative, men derimod aabenbart er ganske umuligt at $\Sigma(\pm u)$ skulde kunne erholde nogen Værdi, der ligger udenfor de nævnte Grændser. Det meest sandsynlige er naturligviis, at nogle af Feilene *(u)* ere positive og at andre af disse ere negative.

Men naar vi nu efter denne indledende Bemærkning om Grændserne for Størrelsen af den sandsynlige Feil, som vi begaae ved, istedetfor $(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_r)$ at tage Værdien h_r, gaae over til den nærmere Bestemmelse af den sandsynligste Værdi for $\Sigma(\pm u)$, saa maae vi først undersøge, hvilke Værdier for $\Sigma(\pm u)$ der overhovedet ere mulige. Til den Ende bemærkes, at hvis der kun var een Feil, f. Ex. u_1, da var der to Tilfælde mulige og lige sandsynlige, nemlig, at $\Sigma(\pm u)$ enten var lig $+u_1$ eller lig $-u_1$; var der derimod to Feil, u_1 og u_2, saa vilde der være fire Tilfælde mulige og lige sandsynlige, idet enhver af Feilene $+u_2$ og $-u_2$ kunde combineres med enhver af de to Feil $+u_1$ og $-u_1$. Antallet af mulige og lige sandsynlige Værdier vilde altsaa være $= 2^2$, og de fire Værdier, hvorom der saaledes kunde være Spørgsmaal vilde være følgende

$$(+u_1 + u_2),\ -(u_1 + u_2),\ +(u_1 - u_2) \text{ og } -(u_1 - u_2)$$

Var der tre Feil, $u_1\, u_2\, u_3$, saa vilde der paa samme Maade være 2^3 mulige og lige sandsynlige Værdier for den søgte Feil, nemlig:

$$(u_1 + u_2 + u_3),\ (u_1 + u_2 - u_3),\ (u_1 - u_2 + u_2),\ (-u_1 + u_2 + u_3)$$
$$-(u_1 + u_2 + u_3),\ -(u_1 + u_2 - u_3),\ -(u_1 - u_2 + u_3),\ -(-u_1 + u_2 + u_3).$$

Fortsætte vi denne Betragtning, da finde vi let, at naar der overhovedet er r Feil, $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_r$, saa er der ogsaa 2^r mulige og lige sandsynlige Værdier for den søgte Feil og at disse 2^r lige sandsynlige Værdier for $\Sigma(\pm u)$ kunne grupperes paa følgende Maade:

Et Tilfælde er muligt, hvori alle Feilene (u) ere positive, i hvilket Tilfælde altsaa $\Sigma(\pm u) = (u_1 + u_2 + u_3 \ldots u_r)$; der er fremdeles af mulige Tilfælde et Antal af

$\frac{r}{1}$ Combinationer af $(r-1)$ positiv og 1 negativ Feil,

endvidere

$\frac{r(r-1)}{1.2}$ Combinat. af $(r-2)$ pos. og 2 negt. Feil mulige,

endvidere

$\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$ Combinat. af $(r-3)$ pos. og 3 negt. Feil mulige,
etc. etc. etc.,

ligeledes er

$\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$ Combinat. af 3 pos. og $(r-3)$ negt. Feil mulige,

endvidere

$\frac{r(r-1)}{1.2}$ Combinat. af 2 pos. og $(r-2)$, negt. Feil mulige,

fremdeles

$\frac{r}{1}$ Combinationer af 1 positiv og $(r-1)$ negativ Feil mulige

og endeligt et Tilfælde muligt, i hvilket alle Feilene (u) ere negative, og hvori altsaa $\Sigma(\pm u) = -(u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_r)$.

Det hele Antal af mulige og lige sandsynlige Værdier, som den søgte Feil $\Sigma(\pm u)$ kan erholde, er altsaa lig:

$$1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \ldots \frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots m}$$
$$+ \ldots \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \frac{r(r-2)}{1.2} + \frac{r}{1} + 1 = 2^r \ldots\ldots \quad (6)$$

Vi bemærke derhos, hvad der forøvrigt ogsaa er indlysende, naar vi betragte det almindelige Udtryk for Feilen, $\Sigma(\pm u) = (\pm u_1 \pm u_2 \ldots \pm u_r)$, at der til enhver positiv Værdi, som Feilen kan have, ogsaa gives en ligesaa stor negativ Værdi, som med samme Sandsynlighed vil være den sande Værdi for

Feilen, og navnlig bemærke vi, at Værdierne, svarende til det første, andet, tredie, fjerde o. s. v. Led fra Venstre til Høire i Rækken (6), gjentage sig i det første, andet, tredie, fjerde o. s. v. Led fra høire til venstre Side af samme Række, kun med den Forskjel, at Fortegnene ere modsatte. Vi bemærke fremdeles, at da der er ligestor Sandsynlighed for, at en hvilkensomhelst af de ovenfor angivne 2^r Værdier for $\Sigma(\pm u)$ er den sande Værdi for denne Feil og da disse 2^r Værdier tillige ere de eneste, som Summen af Feilene eller $\Sigma(\pm u)$ kan erholde, saa er der Vished for, at $\Sigma(\pm u)$ har en af disse Værdier. Der er følgelig en Sandsynlighed $= \frac{1}{2^r} = 2^{-r}$ for, at en hvilkensomhelst af de 2^r Værdier for $\Sigma(\pm u)$, som vi ville betegne med v, er den virkelige Værdi for $\Sigma(\pm u)$ og der er altsaa en Sandsynlighed lig $2 \,.\, 2^{-r} = 2^{-r+1}$ for, at den sande Værdi af den søgte Feil enten er $+v$ eller $-v$, eller med andre Ord for at $\Sigma(\pm u) = \pm v$. Som en Følge heraf, er der endvidere en Sandsynlighed lig $\frac{2^{r-1}}{2^r} = \frac{1}{2}$ for, at $\Sigma(\pm u)$ er positiv, og ligeledes en Sandsynlighed $= \frac{1}{2}$ for, at denne Feil er negativ.

Herefter er det let at angive, hvilken Sandsynlighed der er for, at den sande Værdi af $\Sigma(\pm u)$ er beliggende i en hvilkensomhelst af de $(r+1)$ Grupper af Værdier, som svare til de $(r+1)$ Led, hvoraf Rækken (6) bestaaer. Det indsees nemlig let, at Sandsynligheden for at

$\Sigma(\pm u) = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_r)$ er $= 2^{-r}$

og fremdeles at Sandsynligheden for

at $\Sigma(\pm u)$ er lig en af Combinat. af

$(r-1)$ pos. med 1 negat. Feil $= \frac{r}{1} \,.\, 2^{-r}$,

at $\Sigma(\pm u)$ er lig en af Combinat. af

$(r-2)$ pos. med 2 negat. Feil $= \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, 2^{-r}$,

at $\Sigma(\pm u)$ er lig en af Combinat. af

$(r-3)$ pos. med 3 negat. Feil $= \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 2^{-r}$

o. s. v. og i Almindelighed

at $\Sigma(\pm u)$ er lig en af Combinat. af

$(r - m)$ pos. med m negat. Feil $= \frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots m} . 2^{-r}$,

hvor vi da istedetfor m kunne tage et hvilkelsomhelst af Tallene $0, 1, 2, 3, \ldots r$.

Forudsætte vi nu fremdeles, at den sande Værdi for $\Sigma(\pm u)$ er beliggende i den Gruppe af Værdier for denne Feil, som er dannet af alle Combinationer af $(r-m)$ positive og m negative Feil, saa maa vi i vort Ubekjendtskab med, hvilken Værdi af denne Gruppe, der er den sande Værdi for $\Sigma(\pm u)$, være berettigede til at antage, at vi ville nærme os Sandheden meest ved at tage Gruppens Middelværdi istedetfor den søgte Værdi af $\Sigma(\pm u)$. Til den Ende ville vi altsaa søge at summere alle de $\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m}$ Værdier for $\Sigma(\pm u)$, som indeholdes i den betragtede Gruppe af Combinationer af $(r-m)$ positive med m negative Observationsfeil, og ville da først bemærke, at en hvilkensomhelst af disse Combinationer kan fremstilles under følgende Form:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_r) - 2(u_1 + u_2 + \ldots u_m),$$

hvilket Udtryk ogsaa kan skrives

$$s - 2(u_1 + u_2 + \ldots u_m),$$

idet s betegner Summen af alle Feilene uden Hensyn til Fortegnene. Men da den betragtede Gruppe, efter hvad vi have seet, bestaaer af $\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots m}$ hermed analoge Værdier for $\Sigma(\pm u)$, saa maa altsaa Summen af alle disse Værdiers første Led kunne skrives

$$\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m} . s.$$

For dernæst at finde Summen af alle disse Værdiers sidste Led, bemærkes, at alle Størrelserne $u_1\ u_2 \ldots u_r$ maa forekomme lige mange Gange i denne Sum, samt at det hele Antal af Størrelser (u), som ville findes i bemeldte Sum, kan fremstilles ved

$$2m \times \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Dividere vi dette Antal med r, som fremstiller Antallet af forskjellige deri forekommende Størrelser $(u_1 \, u_2 \ldots u_r)$, saa finde vi at

$$2 \frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots(m-1)}$$

er det Antal Gange enhver af de forskjellige Størrelser $u_1 \, u_2 \ldots u_r$ vil forekomme i den søgte Sum, som altsaa vil være fremstillet ved

$$\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots(m-1)} . 2s.$$

Totalsummen af alle de $\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots m}$ Værdier for $\Sigma(\pm u)$, hvoraf den betragtede Gruppe af Combinationer af $(r-m)$ positive og m negative Observationsfeil (u), der svare til det $(m+1)^{te}$ Led af Rækken (6), bestaaer, kan altsaa fremstilles ved

$$\Sigma_{(m+1)} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m} . s - \frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots(m-1)} . 2s \quad . \; . \quad (7)$$

Naar denne Sum af $\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m}$ Addender, der let kan gives følgende Form

$$\Sigma_{(m+1)} = \frac{r-2m}{r} . \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m} . s, \quad . \; . \; . \quad (8)$$

divideres med Addendernes Antal, erholdes følgende Middelværdi

$$\Sigma(\pm u)_{m+1} = \frac{r-2m}{r} . s, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

hvilken vi følgelig kunne betragte som den søgte Værdi for $\Sigma(\pm u)$, svarende til den $(m+1)^{te}$ Gruppe efter Rækken (6), og Sandsydligheden for, at netop denne er den sande Værdi for $\Sigma(\pm u)$, vil, i Henhold til det Foregaaende, være fremstillet ved

$$\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m} . 2^{-r}.$$

Vi bemærke herved, at Sandsynligheden for, at den sande Værdi af $\Sigma(\pm u)$ er fremstillet ved Formlen (9), er uafhængig af de begaaede Observationsfeils absolute Størrelse og forandres ikke, hvilken Værdi vi end tillægge Summen s, der fremstiller Grændsen for Størrelsen af den sandsynlige Feil. Paa Grnnd heraf, maa $\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots m} . 2^{-r}$ ikke betragtes som Sandsynligheden for at Feilen har den bestemte numeriske Værdi, der afhænger af Observationsfeilens absolute Størrelse; den fremstiller blot Sandsynligheden for, at Forholdet imellem den Feil vi begaae og Grændsen for Størrelsen af den sandsynlige Feil kan fremstilles ved:

$$\left(\frac{\Sigma(\pm u)_{m+1}}{s}\right) = \frac{r-2m}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Vi bemærke endvidere herved, at da Sandsynligheden for, at $\frac{r-2m}{r}$ er det sande Forhold imellem den virkelige Feil og de sandsynlige Feils Maximum, under det samme Antal af Observationer, fuldstændig er bestemt ved dette Forhold, saa maa vi kunne betragte denne Sandsynlighed som en Function af dette Forhold. Denne Function ville vi betegne ved S_r og have da

$$S_r\left(\frac{r-2m}{r}\right) = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2.3\ldots m} \cdot 2^{-r}; \quad \ldots \quad (11)$$

men naar vi almindeligt sætte $1.2.3\ldots i = [i]$, saa finde vi let, at

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1,2\ldots m} = \frac{1.2.3\ldots r}{1.2\ldots(r-m).1.2\ldots m} = \frac{[r]}{[r-m]\,[m]},$$

og da fremdeles

$$\frac{r-2m}{r} = \frac{(r-m)-m}{r},$$

saa see vi, at Formlen (11) kortere kan skrives

$$S_r\left(\frac{(r-m)-m}{r}\right) = \frac{[r]}{[r-m]\,[m]} \cdot 2^{-r} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

I Overeensstemmelse hermed finde vi endvidere, at Sandsynligheden for, at den søgte Feil *enten* er beliggende i den Gruppe, som er dannet af alle Combinationer af $(r-m)$ positive og m negative Observationsfeil, *eller* i den Gruppe, som er dannet af alle $(r-m)$ negative med m positive Feil, eller med andre Ord, Sandsynligheden for, at Feilen er lig $\pm\frac{r-2m}{r}s$ vil være at fremstille ved:

$$S_r\left(\pm\frac{(r-m)-m}{r}\right) = \frac{[r]}{[r-m]\,[m]} \cdot 2^{-r+1} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Efter at vi saaledes have seet, hvilken Sandsynlighed man har for, at den sande Værdi af $\Sigma(\pm u)$ skal være beliggende i en hvilkensomhelst af de forskjellige Grupper af Værdier for denne Feil og efter at vi ligeledes i det Foregaaende have seet, at Sandsynligheden for at den søgte Feil er positiv er $= \frac{1}{2}$, og at Sandsynligheden for at den er negativ ligeledes er $= \frac{1}{2}$, ville vi nu gaae over til at bestemme, hvilken Værdi iblandt alle de 2^{r-1} mulige positive (eller negative) Feil, der er den sandsynligste og som saadan nærmest maa betragtes som havende en Sandsynlighed $= \frac{1}{2}$ for sig. Til den Ende bemærkes, at da enhver af de 2^{r-1} positive Værdier for Feilen har en ligestor Sandsynlighed, saa maa man være berettiget til at antage, at Middeltallet imellem alle disse Værdier vil fremstille den Værdi, der har Sandsynligheden $= \frac{1}{2}$ for sig, saa nær som muligt, og at vi paa samme Maade, iblandt de 2^{r-1} negative Feil, heller ikke ville kunne angive nogen Værdi for $\Sigma(\pm u)$, der er sandsynligere end netop Middeltallet af disse, som derfor ligeledes maa betragtes som havende en Sandsynlighed $= \frac{1}{2}$ for sig.

For nu at finde disse Middeltal, behøve vi naturligviis kun at summere alle de positive Værdier, da Summen af de negative i numerisk Henseende er ligestor med Summen af de positive; men for at kunne udføre Summationen, bliver det nødvendigt at skjeldne imellem de Tilfælde, hvori r, eller Antallet af Observationer, er et lige Tal og de, hvori r er et ulige Tal.

Naar r er et ulige Tal, $r = 2n + 1$, da kan Formlen (6) skrives:

$$2^{2n+1} = 1 + \frac{2n+1}{1} + \frac{(2n+1)2n}{1.2} + \ldots \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} + \ldots \frac{(2n+1)2n}{1.2} + \frac{2n+1}{1} + 1 \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Antallet af positive Værdier for $\Sigma(\pm u)$ er altsaa $= 2^{2n}$ og Antallet af de forskjellige Grupper af positive Værdier for denne Størrelse er, i Henhold til ovenstaaende Række, $= (n + 1)$. Enhver af disse $(n + 1)$ Grupper af Værdier kunne vi let summere ifølge Formlen (7) og finde derved følgende Summer:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_{(1)} &= s \\
\Sigma_{(2)} &= \frac{2n+1}{1} \,.\, s - 2 \,.\, s \\
\Sigma_{(3)} &= \frac{(2n+1)\,2n}{1\,.\,2} \,.\, s - 2 \,.\, \frac{2n}{1} \,.\, s \\
\Sigma_{(4)} &= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, s - 2 \,.\, \frac{2n\,(2n-1)}{1\,.\,2} \,.\, s \\
& \quad \text{etc.} \\
\Sigma_{(n+1)} &= \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots n} \,.\, s - 2 \,.\, \frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)} \,.\, s
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (15)$$

Betegne vi nu Middeltallet af alle de 2^{2n} positive Værdier for $\Sigma(\pm u)$ ved W, saa er det indlysende, at

$$W = (\Sigma_{(1)} + \Sigma_{(2)} + \Sigma_{(3)} + \ldots \Sigma_{(n+1)})\, 2^{-2n}.$$

Naar vi heri indsætte Værdierne for $\Sigma_{(1)}$, $\Sigma_{(2)}, \ldots \Sigma_{(n+1)}$ ifølge (15) og bemærke, at ifølge (14) er

$$1 + \frac{2n+1}{1} + \frac{(2n+1)\,2n}{1\,.\,2} + \ldots \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots n} = 2^{2n},$$

og at vi ifølge Formel (6) have

$$1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n\,(2n-1)}{1\,.\,2} + \ldots \frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)} + \frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\ldots n}$$
$$+ \frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)} + \ldots \frac{2n}{1} + 1 = 2^{2n},$$

altsaa
$$1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n\,(2n-1)}{1\,.\,2} + \ldots \frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{1}{2} \,.\, \frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\ldots n} = 2^{2n-1},$$

saa finde vi let

$$W = \frac{2n\,(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} \,.\, 2^{-2n} \,.\, s$$

og den sandsynligste Værdi for Summen af Observationsfeilene finde vi altsaa fremstllet ved

$$\Sigma(\pm u) = \pm \frac{2n\,(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} \,.\, 2^{-2n} \,.\, s = \frac{[2n]\; 2^{-2n}}{[n]\,[n]} \,.\, s \quad . \quad (16)$$

Naar vi derefter betragte de Tilfælde, hvori r er et lige Tal, $r = 2n + 2$, da see vi, at Formlen (6) for disse Tilfælde kan skrives:

$$2^{2n+2} = 1 + \frac{2n+2}{1} + \ldots \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{1\,.\,2\,.\,n} + \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+2)}{1\,.\,2\ldots(n+1)}$$
$$+ \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{1\,.\,2\ldots n} + \ldots \frac{2n+2}{1} + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

og søge vi derefter Summerne af de forskjellige Grupper af Værdier for $\Sigma(\pm u)$ svarende til det 1ste, 2det, 3die, ... $(n+1)^{te}$ Led af denne Række, saa finde vi disse ifølge Formlen (7) som følger:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_{(1)} &= s \\
\Sigma_{(2)} &= \frac{2n+2}{1} \cdot s - 2 \cdot \frac{2n+1}{1} \cdot s \\
\Sigma_{(3)} &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{1 \cdot 2} \cdot s - 2 \cdot \frac{2n+1}{1} \cdot s \\
\Sigma_{(4)} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot s - 2 \cdot \frac{(2n+1)(2n)}{1 \cdot 2} \cdot s \\
&\text{etc.} \\
\Sigma_{(n+1)} &= \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot s - 2 \cdot \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+3)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \cdot s
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (18)$$

Bestemme vi dernæst paa samme Maade Summen af alle de Værdier, hvoraf den Gruppe bestaaer, som svarer til det mellemste Led af Rækken (17) og som er dannet af alle Combinationer af $(n+1)$ positive med $(n+1)$ negative Observationsfeil (u), da sees, at denne Sum kan fremstilles:

$$\Sigma_{(n+2)} = \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+2)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \cdot s - 2 \cdot \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot s.$$

Men dette Udtryk er aabenbart lig Nul, hidrørende fra, at to og to af alle Addenderne ere ligestore og have modsatte Fortegn. For nu at bestemme Summen af alle de positive Addender i denne Gruppe, saa erindres først, at $\Sigma_{(n+2)}$ er dannet af en Sum af $\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+2)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}$ Addender af Formen

$$s - 2\,(u_1 + u_2 + \ldots u_{n+1}),$$

hvis første Led s heelt igjennem er den samme Størrelse, og hvis andet Led er dannet af alle de $\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+2)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}$ $= 2\,\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1 \cdot 2 \ldots n}$ forskjellige Combinationer, hvortil $(n+1)$ Observationsfeil udtagne af de $(2n+2)$ give Anledning.

Spørge vi nu først om Antallet af de Combinationer iblandt det hele Antal, hvori en hvilkensomhelst Observationsfeil u indgaaer, saa er det klart, at da Summen af samtlige Combinationer, ɔ: $2 . \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} . s$, indeholder enhver af Observationsfeilene, altsaa ogsaa Feilen u, $2 . \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$ Gange, og da denne Sum er dannet af $2 . \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$ Addender af Formen: $(2u_1 + 2u_2 + \ldots 2u_{n+1})$, hvori enhver Feil, forsaavidt den forekommer, findes dobbelt, saa kan kun det halve Antal Combinationer indeholde Feilen u. Summen af samtlige Combinationer af $(n+1)$ Feil udtagne af de $(2n+2)$ Observationsfeil, altsaa $2 . \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} . s$, kan følgelig deles i tvende Summer U og V, hver bestaaende af $\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$ Adddender, saaledes, at U fremstiller Summen af alle de Combinationer, hvori u indgaaer, og V Summen af alle de, hvori u ikke findes. Men det er iet at indsee, at de $\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$ forskjellige Addender i U, der indeholde u som Addend, kunne betragtes som dannede af alle de $\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$ forskjellige Summer af n Feil som kunne udtages af de øvrige $(2n+1)$ Observationsfeil, navnlig ved til alle disse Combinationer at addere Feilen u, og at alle Addenderne i V paa samme Maade kunne betragtes som dannede af de selvsamme $\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}$ Summer af n Feil, ved til disse Summer at addere en af Feilene, u exclusive. Men hvis vi altsaa forudsætte, at u er den mindste af alle de $(2n+2)$ Observationsfeil, saa vil følgelig enhver af de enkelte Summer i U være mindre end den tilsvarende Sum i V, hvoraf atter følger, at hele Summen U maa være mindre end Summen V.

Addere vi altsaa alle de Addender, som indeholde u, saa erholde vi Summen $= \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} . s - U$ og addere vi derefter alle de Addender, som ikke indeholde u, saa finde vi Summen $= \frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} . s - V$. Summen af disse tvende Udtryk er ifølge det Foregaaende lig Nul og deraf følger, at

$$-\left(\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\,.\,s-U\right)=\left(\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\,.\,s-V\right),$$

hvoraf fremgaaer, at Summen af alle de positive Addender i $\Sigma_{(n+2)}$ kan udtrykkes ved

$$M=\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\,.\,s-U\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(19)$$

For nu at finde M, maa vi først bestemme U. Til den Ende bemærkes, næst at erindre, at Feilen u vil findes $\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+2)}{1.2\ldots(n+1)}$ Gange, at alle de øvrige $(2n+1)$ Feil ville forekomme lige mange Gange i Summen U, efterdi de alle ere combinerede med u paa selvsamme Maade. Hvis vi nu altsaa ved x betegne det Antal Gange enhver af disse $(2n+1)$ Feil forekomme i U, saa vil det hele Antal af disse Størrelser, som findes i denne Sum, være $(2n+1)x$, og lægge vi hertil det Antal Gange, som u forekomme i U, saa erholde vi det hele Antal Feil, som findes i U, fremstillet ved

$$(2n+1)x+\frac{(2n+2)(2n+1)(2u)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n+1}\,.$$

Men da der i hver af de lige sandsynlige Værdier, hvoraf Summen U bestaaer, findes $(2n+2)$ Feil, nemlig $(u_1\,u_2\ldots u_{2n+2})$, saa kan det fulde Antal Feil, som findes i U, ogsaa fremstilles

$$(2n+2)\,.\,\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\,.$$

Sætte vi disse to Udtryk ligestore, saa erholde vi

$$x=2\,.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,.$$

Naar vi nu drage x eller det Antal Gange enhver af de $(2n+1)$ større Feil forekommer i U fra det Antal Gange, hvori u forekommer i U, saa finde vi at u maa forekomme enkeltviis

$$2\,.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\text{ Gange.}$$

Saaledes finde vi altsaa den søgte Sum

$$U=2\,.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,.\,s+2\,.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\,u\,.\,.\quad(20)$$

og naar denne Værdi indsættes i Formlen (19) erholdes

$$M = \frac{(2n+1)(2n)..(n+2)}{1.2...n} . s - 2 . \frac{2n(2n-1)..(n+2)}{1.2...(n-1)} . s - 2 . \frac{2n(2n-1)..(n+1)}{1.2...n} . u \ . \quad (21)$$

Vi ville herved strax bemærke, at naar denne Sum af $\frac{(2n+1)(2n)\dots(n+2)}{1.2\dots n}$ Addender, der suplerer Formlerne (7) og (8), divideres med Addendernes Antal, saa erholdes følgende Middelværdi for Gruppen af positive Combinationer af $(n+1)$ positive med $(n+1)$ negative Observationsfeil, der altsaa suplerer Formlen (9)

$$\Sigma(\pm u)_{n+2} = \frac{s-(2n+2)u}{2n+1} \dots\dots\dots \quad (22)$$

og Sandsynligheden for, at den søgte Feil har denne Værdi, findes let at være

$$S_r\left(\frac{1-(2n+2)\frac{u}{s}}{2n+1}\right) = \frac{[2n+2]\,2^{-(2n+3)}}{[n+1][n+1]} \dots\dots \quad (23)$$

Sandsynligheden for, at den søgte Feil enten er en af de positive eller er en af de negative Combinationer af $(n+1)$ positive med $(n+1)$ negative Observationsfeil kan altsaa skrives:

$$S_r\left(\pm\frac{1-(2n+2)\frac{u}{s}}{2n+1}\right) = \frac{[2n+2]\,2^{n-(2n+2)}}{[n+1][n+1]}, \dots\dots \quad (24)$$

hvilken Formel altsaa tjener til at suplere Formlen (12).

Addere vi nu alle de forskjellige positive Værdier for $\Sigma(\pm u)$, hvilke findes deelviis summerede under (18) og (21), og erindre vi derhos, at det hele Antal af positive Værdier er $= 2^{2n+1}$, saa finde vi følgende Middelværdi for alle disse Feil

$$W = (\Sigma_{(1)} + \Sigma_{(2)} + \Sigma_{(3)} + \dots, \Sigma_{(n+1)} + M)\, 2^{-(2n+1)}$$

og indsætte vi Værdierne for $\Sigma_{(1)}\, \Sigma_{(2)} \dots \Sigma_{(n+1)}$ og M, idet vi bemærke, at

$$2^{2n+1} = 1 + \frac{2n+2}{1} + \frac{(2n+2)(2n+1)}{1.2} + \dots \frac{(2n+2)(2n+1)\dots(n+3)}{1.2\dots n} + \frac{(2n+1)(2n)\dots(n+2)}{1.2\dots n}$$

$$= 2\left(1 + \frac{2n+1}{1} + \frac{(2n+1)2n}{1.2} + \dots \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\dots(n+2)}{1.2.3\dots n}\right),$$

saa viser det sig let, at den søgte Middelværdi kan fremstilles

$$W = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n}(s-u)\,.\,2^{-2n}.$$

Havde vi summeret alle de negative Værdier for $\Sigma(\pm u)$, saa vilde vi have erholdt det samme Resultat, kun med den Forskjel, at Fortegnet var blevet — istedetfor +.

Den sandsynligste Værdi for Summen af de $(2n+2)$ Observationsfeil kan følgelig fremstilles:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(\pm u) &= \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot 2^{-2n} \cdot (s-u) \\ &= \pm \frac{[2n]2^{-2n}}{[n][n]}(s-u)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (25)$$

Vi bemærke herved, at Formlerne (16) og (25) let kunne gives følgende Form

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(\pm u) &= \pm \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n} \cdot s \text{ og} \\ \Sigma(\pm u) &= \pm \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n} \cdot (s-u)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (26)$$

og da fremdeles som bekjendt

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2}{\pi(2n+1)} \cdot \left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right)^2,$$

hvoraf for $n = \infty$ erholdes

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}},$$

saa følger deraf, at den sandsynlige Værdi for Summen af et uendeligt stort Antal af Observationsfeil kan fremstilles:

$$\Sigma(\pm u) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{s^2}{2n+1}} = \pm\, 0{,}7979\sqrt{\frac{s^2}{2n+1}} \quad \ldots (27)$$

Det var ved Hjælp af Formlerne (16) og (25) eller de dermed eensbetydende Former (26), at jeg i det foran omtalte Tilfælde bestemte Størrelsee af de sandsynlige Feil, som maatte antages at hefte ved de forskjellige faste Nivellementspunkter, der findes beskrevne i et af mig paa Communens Regning udgivet lille Skrift: *Oversigt over Beliggenheden og Høiden af 131 faste Nivellements-Punkter i Kjøbenhavn og paa Christianshavn,* *Kbhvn. 1856*, og hvorved jeg blot skal bemærke, at jeg, ved Bestemmelsen af de forskjellige Punkters Nøiagtighed, til yderligere Sikkerhed har benyttet den høiere Grændse for alle Feilene (0,02′) istedetfor at beregne Størrelserne u ifølge Formlen (3) eller paa anden Maade, saaledes som jeg nu strax nærmere skal omtale.

Tænke vi os, at alle de forskjellige Nivellementsplader ere saaledes anbragte, at der er den selvsamme Høidedifferents imellem hver to og to paa hinanden følgende Plader af den hele Række, saa ville vi kunne bestemme den sandsynlige Høidebeliggenhed af den r^{te} Plade med samme Nøiagtighed, deels ved at udføre Nivellementet fra Punkt til Punkt for alle de r Plader, idet vi for hver to og to paa hinanden følgende Plader bestemme Höideforskjellen og den sandsynlige Feil, deels derved, at vi for to bestemte, paa hinanden følgende Plader udføre r Nivellementer og ved hvert Nivellement bestemmer saavel Høidedifferentsen imellem Pladerne som Størrelsen af den sandsynlige Feil ved denne Høidedifferents. Hvilken af disse Methoder vi benytte, maa give samme Resultat med Hensyn paa Høidebeliggenheden af den r^{te} Nivellementsplade, og begge Veie maa altsaa føre os tilbage til Formlerne (5), idet vi da have $A_1 = A_2 = A_3 \ldots = A_r$. See vi nu foreløbig bort fra den Omstændighed, at det forud antages bekjendt, at alle de enkelte Høidedifferentser ere ligestore og tænke vi os derimod, at vi for hvilkesomhelst to og to paa hinanden følgende Nivellementsplader have udført i Nivellementer og derved efterhaanden fundet disse to Pladers Høideforskjel at være $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha^i$, samt at vi derefter have bestemt Middeltallet af alle disse Værdier og fundet Høideforskjellen imellem det $(p\text{-}1)^{te}$ og det p^{te} Punkt at være a_p samt den sandsynlige Feil, som hefter ved denne Høidebestemmelse, at være u_p, saa ville vi kunne antage, at sandsynligviis er $a_p \pm u_p = A_1$. Som en Følge deraf bliver den sandsynligste Høidebeliggenhed af den r^{te} Nivellementsplade

$$r \,.\, A_1 = h_r + \Sigma(\pm u) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

og vi ville altsaa, ved at betragte h_r som Høiden af det r^{te} Punkt over Nulpunktet, begaae en Feil,

$$\Sigma(\pm u) = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \ldots \pm u_r,$$

som, efter hvad vi i det Foregaaende have seet, med lige Sandsynlighed kan tillægges 2^r forskjellige Værdier, som dog lade sig henføre til $(r+1)$ Grupper af Værdier, der hver har sin særegne Grad af Sandsynlighed, saaledes som tidligere udviklet.

Men Formlen (28) ville vi ogsaa kunne benytte til at bestemme den sandsynlige Værdi for den enkelte Høidedifferents A_1, idet vi finde

$$A_1 = \frac{h_r}{r} + \frac{\Sigma(\pm u)}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (29)$$

og deraf følger altsaa, at man ved at sætte

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_r}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ (30)$$

maa regne paa at begaae en Feil,

$$\frac{\Sigma(\pm u)}{r} = \frac{\pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \ldots \pm u_r}{r},$$

hvis sandsynlige Værdi (ɔ: den, som Feilen ligesaa let kan overskride som underskride) i Henhold til det Foregaaende kan skrives:

$$\left.\begin{array}{c} \left(\frac{\Sigma(\pm u)}{r}\right) = \pm \frac{[2n]2^{-2n}}{[n][n]} \cdot \left(\frac{s}{2n+1}\right) = \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \left(\frac{s}{2n+1}\right) \\ \text{eller} \\ \left(\frac{\Sigma(\pm u)}{r}\right) = \pm \frac{[2n]2^{-2n}}{[n][n]} \cdot \left(\frac{s-u}{2n+2}\right) = \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \left(\frac{s-u}{2n+2}\right) \end{array}\right\} . \quad (31)$$

alt eftersom r er et ulige Tal $= (2n+1)$ eller et lige Tal $= (2n+2)$, idet som forhen s betegner Summen af alle Feilene, tagne positive, og u betegner den mindste Feil.

Betegne vi i det første Tilfælde Middeltallet af de $(2n+1)$ Feil, alle tagne positive, ved v og i det andet Tilfælde Middeltallet af alle de $(2n+1)$ største Feil ved v, saa finde vi den sandsynlige Feil respective at kunne fremstilles

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\Sigma(\pm u)}{r}\right) = \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot v \text{ og} \\ \left(\frac{\Sigma(\pm u)}{r}\right) = \pm \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} \cdot v \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (32)$$

Herved skal jeg bemærke, at da vi i det Foregaaende have viist, at Grændsen for $\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots \;\; 2n}$, for n voxende i det Uendelige, er $= \sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}}$, saa følger deraf, at den sandsynlige Feil, som er fremstillet ved Formlerne (31) og (32), vedblivende aftager, naar Antallet af Iagttagelser voxer, og at altsaa Middelværdien af et Antal af observerede Værdier for den søgte Størrelse A_1 (Formel 30) convergerer imod den sande Værdi for denne Størrelse, naar Antallet af Observationer voxer i det Uendelige.

I Reglen finder man nu ikke den sandsynlige Observationsfeil u_p ved Hjælp af en Række af særskilte Observationer, men megetmere derved, at man betragter $(A_1 - a_p)$ som Observationsfeilen, efter at man i Forveien har bestemt A_1 ved Hjælp af Formlen (30), og paa denne Maade er det da overmaade let ifølge Formlerne (31) at beregne den sandsynlige Feil, som man begaaer, naar man tager Middelværdien af en Række af r Observationer istedetfor den søgte Størrelse A_1, Formel (30).

Tænke vi os udført en Række af r lige gode Observationer til Bestemmelsen af en ubekjendt Størrelse A_1, da vil enhver af disse Observationer være belastet med en sandsynlig Feil, om hvis Størrelse vi i Reglen forud ingen Mening have uden den, at den begaaede Feil u ikke overskrider visse Grændser, der ere ligestore, men med modsatte Fortegn, og hvis numeriske Værdi vi ville betegne med μ. Indenfor disse Grændser er man altsaa, for en Række af lige gode Observationer, vis paa, at alle de sandsynlige Feil ere beliggende, men man kan umulig vide forud hvilken Plads, indenfor disse Grændser, hver enkelt af Observationsfeilene vil indtage. Udføre vi imidlertid en heel Række af lige gode Observationer, saa vil det vise sig, at Feilene gruppere sig saaledes, at disse bestandig blive talrigere jo mindre den Værdi er, hvorom de inden visse constante Grændser gruppere sig, og jeg skal nu søge at løse den Opgave, at bestemme Loven for Talrigheden i Forhold til Feilenes Størrelse.

Naar vi til Bestemmelsen af en ubekjendt Størrelse A_1 udføre r Observationer og for denne successivt finder Værdierne $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_r$, og derefter tage Middelværdien

$$\frac{\Sigma(a)}{r} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_r}{r}$$

istedetfor den søgte Størrelse A_1, saa er der, efter hvad der er udviklet,

en Sandsynlighed $= 2^{-r}$ for at begaae en Feil $= 1 \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

» » $= \frac{r}{1} \,.\, 2^{-r}$ » » » » $= \frac{r-2}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

» » $= \frac{r(r-1)}{1\,.\,2}\, 2^{-r}$ » » » $= \frac{r-4}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

o. s. v.

og almindeligt

en Sandsynlighed $= \frac{[r]\,2^{-r}}{[r-m][m]}$ for at begaae en Feil $= \frac{r-2m}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$,

hvor m betegner en af Værdierne 0, 1, 2, 3 . . . r.

Heraf drager jeg den Slutning, at hvis vi udførte 2^r Rækker af lige paalidelige Forsøg, hver Række bestaaende af r Observationer, til Bestemmelsen af Størrelsen A_1, og for hver af disse 2^r Rækker af Forsøg bestemte Middeltallet, $\frac{\Sigma(a)}{r}$, af de r lige gode Værdier for A_1, saa vilde vi sandsynligviis

ved 1 Række af Forsøg begaae en Feil $= 1 \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

» $\frac{r}{1}$ Rækker » » » » » $= \frac{r-2}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

» $\frac{r(r-1)}{1\,.\,2}$ » » » » » » $= \frac{r-4}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

o. s. v.

ved $\frac{[r]}{[r-m][m]}$ Rækker af Forsøg begaae en Feil $= \frac{r-2m}{r} \left(\frac{s}{r}\right)$

o. s. v.

» $\frac{r(r-1)}{1\,.\,2}$ » » » » » » $= -\frac{r-4}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

» $\frac{r}{1}$ » » » » » » $= -\frac{r-2}{r} \,.\left(\frac{s}{r}\right)$

» 1 » » » » » » $= -1 \,.\left(\frac{s}{r}\right)$.

Men denne Lov for Feilenes Fordeling, som saaledes gjør sig gjældende, naar vi betragte Middelfeilene af flere Rækker af lige mange og lige gode Forsøg, maa ogsaa gjælde for de enkelte Forsøg, og jeg troer derfor, at vi maae være berettigede til at antage, at de Observationsfeil, vi begaae, naar vi udføre en Række af r lige gode Forsøg, ville fordele sig paa samme Maade, som ovenfor angivet for Middelfeilene, navnlig i Forhold til Sandsynligheden for hver Gruppe især. Betegne vi altsaa Grændsen for de mulige Observationsfeil ved μ, saa kunne vi antage, at Antallet af Observationsfeil, der variere omkring Størrelsen μ, vil kunne udtrykkes ved $\alpha_0 = c \,.\, 2^{-r}$

omkring $\frac{r-2}{r} \,.\, \mu$ » » » » $\alpha_1 = c \,.\, \frac{r}{1} \, 2^{-r}$

» $\frac{r-4}{r} \,.\, \mu$ » » » » $\alpha_2 = c \,.\, \frac{r(r-1)}{1\,.\,2} \, 2^{-r}$

o. s. v.

og almindeligt, at Antallet af Feil, der variere omkring Størrelsen, $f_m = \frac{r-2m}{r} \,.\, \mu$ vil kunne fremstilles ved $\alpha_m = c \,.\, \frac{[r]\, 2^{-r}}{[r-m]\,[m]}$, hvor c er en Constant, som bestemmes derved, at vi skulle have

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_r = r.$$

Men da vi tillige have

$$1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1\,.\,2} + \ldots \frac{r(r-1)}{1\,.\,2} + \frac{r}{1} + 1 = 2^r,$$

saa sees det let, at $c = r$, og deraf følger, at Antallet af Feil i den $(m+1)^{te}$ Classe kan fremstilles ved:

$$\alpha_m = \frac{r\,.\,[r]\; 2^{-r}}{[r-m]\,[m]}, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

hvoraf følger, at

$$S_r\left(\frac{r-2m}{r}\right) = \frac{\alpha_m}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Med Hensyn paa Størrelsen af de Feil, som ere indbefattede i den $(m+1)^{te}$ Gruppe af Feil, bemærkes, at Middelfeilen for den hele Gruppe kan, som foran anført, fremstilles ved:

$$f_m = \frac{r-2m}{r} \,.\, \mu \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

og, at denne Gruppe af Feil maa nærmest kunne betragtes som indbefattende alle de Observationsfeil, der ere beliggende imellem Grændserne $(f_m \pm \frac{1}{r}\mu)$. —

Hvis vi i Formlerne (33) og (35) indsætte $(m - r)$ istedetfor m, erholdes

$$\alpha_{(r-m)} = \alpha_m \quad \text{og} \quad f_{(r-m)} = -f_m, \; \ldots\ldots \; (36)$$

og deraf følger, at der er Sandsynlighed for, at Observationsfeilene ville forekomme Parviis og være af Formen $\pm f_m$, saa at der til enhver positiv Feil som forekommer sandsynligviis ogsaa findes en negativ Feil af samme numeriske Værdi.

Jeg vil nu særskilt betragte Formlerne (33) og (35) i de Tilfælde, hvori r er et ulige Tal og de, hvori r er et lige Tal.

I første Tilfælde finde vi, at for $r = 2n + 1$, kan Formlerne (33) og (35) skrives:

$$\alpha_m = \frac{(2n+1)[2n+1]\,2^{-(2n+1)}}{[2n+1-m][m]} \; \ldots\ldots\ldots \; (33,\text{a})$$

$$f_m = \frac{2n+1-2m}{2n+1}\cdot\mu \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (35,\text{a})$$

I andet Tilfælde, naar $r = 2n + 2$, kan Formlerne skrives:

$$\alpha_m = \frac{(2n+2)[2n+2]\,2^{-(2n+2)}}{[2n+2-m][m]} \; \ldots\ldots\ldots \; (33,\text{b})$$

$$f_m = \frac{2n+2-2m}{2n+2}\cdot\mu \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (35,\text{b})$$

hvilke Formler fremstille Antallet af sandsynlige Feil og Middelstørrelser af disse for hver enkelt Gruppe af Observationsfeil, naar undtages det Tilfælde, hvori $m = n + 1$; thi i dette Tilfælde er $f_m = 0$, hvilket som tidligere bemærket hidrører derfra, at f_m er Middeltallet af samtlige positive og negative Observationsfeil, der svare til det mellemste Led af Rækken (17). Antallet af positive (eller negt.) Feil henhørende til denne Gruppe bliver i Overeensstemmelse med Formlen (23) at fremstille ved

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \dfrac{(2n+2)\,[2n+2]\,2^{-(2n+3)}}{[n+1]\,[n+1]} \\ \text{og Middeltallet af disse Feil er} \\ f_{n+1} = \pm \dfrac{1-(2n+2)\dfrac{u}{s}}{2n+1} \,.\, \mu \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Multiplicere vi Antallet af Feil i enhver af de $(r+1)$ Grupper med Middelfeilen for hver Gruppe især, saa erholde vi, naar vi betragte det almindelige Led:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{for } r=2n+1) & \alpha_m f_m = \dfrac{2n+1-2m}{2n+1} \cdot \dfrac{[2n+1]}{[2n+1-m][m]} \cdot (2n+1)\,\mu\, 2^{-(2n+1)} \\ (\text{for } r=2n+2) & \left\{\begin{array}{l} \alpha_m f_m = \dfrac{2n+2-2m}{2n+2} \cdot \dfrac{[2n+2]}{[2n+2-m][m]} \cdot (2n+2)\,\mu\, 2^{-(2n+2)} \\ \alpha_{n+1} f_{n+1} = \pm \dfrac{1-(2n+2)\dfrac{u}{s}}{2n+1} \cdot \dfrac{[2n+2]}{[n+1][n+1]}\,(2n+2)\,\mu 2^{-(2n+3)} \end{array}\right. \end{array}\right\} (38)$$

Men naar Hensyn tages til Formlerne (8) og (21) erholdes

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{for } r=2n+1) & \alpha_m f_m = \dfrac{\Sigma(m+1)}{s} \,.\, (2n+1)\,\mu\, 2^{-(2n+1)} \\ (\text{for } r=2n+2) & \left\{\begin{array}{l} \alpha_m f_m = \dfrac{\Sigma(m+1)}{s} \,.\, (2n+2)\,\mu\, 2^{-(2n+2)} \\ \alpha_{n+1} f_{n+1} = \pm \dfrac{M}{s}\,(2n+2)\,\mu\, 2^{-(2n+2)} \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

Naar vi nu i Formlerne (39) successive sætte $m=0, 1, 2\ldots n$ og derpaa adderer alle de erholdte Værdier for $\alpha_m \,.\, f_m$, saa finde vi, ifølge det Foregaaende, at Summen af alle de positive Feil er lig $\frac{1}{2}s$, og at altsaa

for $r=2n+1$, $\frac{1}{2}s = \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\;\;\ldots\;\;n} \,.\, (2n+1)\,\mu\, 2^{-(2n+1)}$ og

for $r=2n+2$, $\frac{1}{2}s = \dfrac{2n(2n-1)(2n-n)\ldots)n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\;\;\ldots\;\;n} \,.\, (2n+2)\,\mu\, 2^{-(2n+1)} \,.\, \dfrac{s-u}{s}$,

hvoraf følger

$$\left.\begin{array}{ll} \mu = \dfrac{[n]\,[n]}{[2n]}\, 2^{2n} \,.\, \left(\dfrac{s}{2n+1}\right) & (\text{for } r=2n+1) \\ \mu = \dfrac{[n]\,[n]}{[2n]}\, 2^{2n} \,.\, \dfrac{s}{s-u} \cdot \left(\dfrac{s}{2n+2}\right) & (\text{for } r=2n+2) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Med Hensyn paa den sidste af disse Formler bemærkes, at naar vi tænke os den mindste Feil u at være saa lille, at den er forsvindende imod Summen s, saa bliver $\frac{s}{s-u} = 1$, hvilket giver en lavere Grændse for μ; tænke vi os derimod u saa stor, at den er lig Middelfeilen $\left(\frac{s}{2n+2}\right)$, saa bliver $\frac{s}{s-u} = \frac{2n+2}{2n+1}$, hvilket svarer til en høiere Grændse for μ; men naar Forsøgenes Antal er nogenlunde stort, saa falde disse Grændser saa nær sammen, at den sidste Formel (40) uden mærkelig Feil kan skrives:

$$\mu = \frac{[n]\,[n]}{[2n]} 2^{2n} \left(\frac{s}{2n+2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

hvoraf vi da kunne beregne Grændseværdien μ, uagtet vi ikke kjende u. Men selv uafhængig af om Forsøgenes Antal er lille eller stort, ville vi med en stor Grad af Tilnærmelse kunne bestemme Størrelsen af den mindste Feil u saavelsom Feilenes Maximum eller Størrelsen μ, navnlig ved Hjælp af de to sidste Formler (37) og (40); thi det er klart, at Middelfeilen f_{n+1}, Formel (37), stedse maa være meget nær af samme Størrelse som den mindste Feil u, og man maa altsaa, i Særdeleshed naar Forsøgenes Antal ikke er meget stort, med en stor Grad af Tilnærmelse kunne sætte den numeriske Værdi af $f_{n+1} = u$, i hvilket Tilfælde den sidste Formel (37) kan skrives:

$$u = \frac{1-(2n+2)\frac{u}{s}}{2n+1} \cdot \mu, \text{ hvoraf}$$

$$u = \frac{\mu}{(2n+1)+(2n+2)\frac{\mu}{s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Men ifølge den anden Formel (40) finde vi fremdeles

$$(s-u)\mu = \frac{[n]\,[n]}{[2n]} 2^{2n} \cdot \frac{s^2}{2n+2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

hvoraf
$$u = \frac{s\mu - \frac{[n]\,[n]}{[2n]} 2^{2n} \frac{s^2}{2n+2}}{\mu}.$$

Sætte vi altsaa disse to Værdier for u ligestore, saa erholde vi en Ligning, hvoraf findes:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mu}{s} = -\dfrac{1-\dfrac{N}{2n+1}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{1-\dfrac{N}{2n+1}}{2}\right) + \dfrac{N}{2n+2}} \\ \text{idet} \quad N = \dfrac{[n]\,[n]}{[2n]}\, 2^{2n}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (44)$$

og naar vi da først have fundet $\frac{\mu}{s}$ og μ, saa finde vi let u ved Hjælp af Formlen (42).

Før jeg gaaer over til at vise Anvendelsen af de udviklede Formler paa specielle Exempler, synes det mig interessant at undersøge, i hvilket Forhold den her givne Theori staaer til den almindelige Theori om de sandsynlige Feil.

Vi have seet i det Foregaaende, at naar vi udføre r Observationer til Bestemmelsen af en ubekjendt Størrelse og vi derefter tage Middeltallet af alle de observerede Værdier istedetfor den Ubekjendte, saa er der, ifølge Formlen (12), en Sandsynlighed

$$S_r\left(\frac{r-2m}{r}\right) = \frac{[r]\, 2^{-r}}{[r-m][m]}$$

for at Forholdet imellem den Feil vi begaae og Grændsen for Størrelsen af den sandsynlige Feil er

$$x = \left(\frac{r-2m}{r}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

hvor m betegner et af Tallene $0, 1, 2, 3 \ldots r$.

Af Formlen (45) finde vi

$$m = \frac{r}{2}(1-x) \quad \text{og} \quad (r-m) = \frac{r}{2}(1+x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

og naar disse Værdier indsættes i Formlen (12) erholdes:

$$S_r(x) = \frac{[r]\, 2^{-r}}{\left[\frac{r}{2}(1+x)\right]\left[\frac{r}{2}(1-x)\right]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Før vi gaae videre, bemærker jeg, at det er bekjendt, at naar i betegner et stort Tal, saa har man tilnærmelsesviist

$$[i] = \sqrt{2\pi}\,.\, i^{(i+\frac{1}{2})}\,.\, e^{-i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

og jeg skal endvidere derved fremhæve, at endskjøndt Formlen (48) kun er exact, naar i er et uendelig stor Tal, saa er Formlen (48) dog stedse tilnærmelsesviis rigtig, naar blot i er et positivt heelt Tal, hvilket jeg skal oplyse ved at betragte en Række af Værdier for i. Antage vi saaledes, at i successive har følgende Værdier

$$i = 1\,,\quad 2\,,\quad 3\,,\quad 4\,,\quad 5\,,\quad 10\,,$$

saa finde vi de sande Værdier for $[i]$ respective at være:

$$[i] = 1\,,\quad 2\,,\quad 6\,,\quad 24\,,\quad 120\,,\quad 3628800\,,$$

hvorimod vi finde de tilsvarende Værdier for:

$$\sqrt{2\pi}\,.\,i^{(i+\frac{1}{2})}e^{-i} = 0{,}92\,,\ 1{,}91\,,\ 5{,}836\,,\ 23{,}506\,,\ 118{,}02\,,\ 3598700\,,$$

og deraf fremgaaer, hvad jeg vilde vise, nemlig at vi stedse med Tilnærmelse kunne udtrykke $[i]$ ved Formlen (48), naar i er et positivt heelt Tal.

Men naar vi nu indsætte Værdierne for $[r]$, $\left[\frac{r}{2}(1+x)\right]$ og $\left[\frac{r}{2}(1-x)\right]$ ifølge Formlen (48) i Formlen (47), saa finde vi

$$S_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,.\,r}}\,.\,(1+x)^{-\left(\frac{r}{2}(1+x)+\frac{1}{2}\right)}\,.\,(1-x)^{-\left(\frac{r}{2}(1-x)+\frac{1}{2}\right)}\,, \quad (49)$$

hvoraf, idet Log. betegner den naturlige Logarithme og e betegner Grundtallet for samme, erholdes

$$S_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,.\,r}}\,.\,e^{-\left\{\left(\frac{r}{2}(1+x)+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}\,(1+x)+\left(\frac{r}{2}(1-x)+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(1-x)\right\}} \quad \ldots \quad (50)$$

hvilken Formel let kan gives følgende Form

$$S_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,.\,r}}\,.\,e^{-\left(\frac{r-1}{2}x^2+\frac{r-3}{3\,.\,4}x^4+\frac{r-5}{5\,.\,6}x^6+\ldots\right)} \quad \ldots, \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Det maa imidlertid herved bemærkes, at $S_r(x)$ egentlig fremstiller Sandsynligheden for, at Forholdet imellem Feilen f og dens Grændse μ varierer omkring $x = \frac{r-2m}{r}$ eller Sandsynligheden for, at dette Forhold har en af de Værdier, som ligge imellem Grændserne $\left(x+\frac{1}{r}\right)$ og $\left(x-\frac{1}{r}\right)$, og vi maae derfor ogsaa kunne betragte $S_r(x)$ som Summen af Sandsynlighederne, der svare til alle de mulige Feil, som kunne tænkes beliggende imellem Grændserne $\left(x+\frac{1}{r}\right)\mu$ og $\left(x-\frac{1}{r}\right)\mu$. Betragtes alle disse Sandsynligheder som ligestore og betegnes deres Størrelse ved $\varphi_{(x)}$, samt antage vi, at der imellem Grændserne $\left(x+\frac{1}{r}\right)$ og $\left(x-\frac{1}{r}\right)$, hvis Differents er $=\frac{2}{r}$, findes $\frac{\left(\frac{2}{r}\right)}{\varepsilon}$ Feil, idet ε betegner Afstanden imellem Feilene indbyrdes, saa er det klart, at

$$\varphi_{(x)}=\frac{r\,.\,\varepsilon}{2}\,.\,S_r(x),$$

som ifølge Formel (51) kan skrives

$$\varphi_{(x)}=\varepsilon\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,.\,e^{-\left(\frac{r-1}{2}x^2+\frac{r-3}{3\,.\,4}x^4+\frac{r-5}{5\,.\,6}x^6+\ldots\right)}\quad\ldots\ldots\;(52)$$

Af Formlen (52) følger, at naar x er en lille Brøk, og Antallet af Forsøg, r, er et stort Tal, saa kan Sandsynligheden for at begaae en Feil $f=x\,.\,\mu$ tilnærmelsesviis fremstilles:

$$\varphi_{(x)}=\varepsilon\,.\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,.\,e^{-\frac{r}{2}x^2}\;;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(53)$$

sætte vi her $\frac{r}{2}=h^2$, saa erholde vi

$$\varphi_{(x)}=\frac{h\,.\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}\,.}\,e^{-h^2x^2}\,,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(54)$$

og denne Formel er, naar x betragtes som selve Observationsfeilen, overeensstemmende med den, ifølge den almindelige Theori om Feilene, fundne Formel (4).

Efter hvad her er udviklet er det indlysende, at da Formlen (54) ikkun tilnærmelsesviis fremstiller Sandsynligheden for den begaaede Feil, medens denne Sandsynlighed skarpere er fremstillet ved Formlen (52), saa maa ogsaa de *mindste Qvadraters Methode,* som er fremgaaet af (54), betragtes som en Approximation til følgende Methode, som vi kunne udlede af Formlen (52) paa samme Maade, som de mindste Qvadraters Methode udledes af Formlen (54).

Jeg vil, for at fremstille denne Methode, som man maaskee kunde kalde *de sandsynligste Feils Methode*, antage, at et Antal variable Størrelser $x, y \ldots t$ afhænge af hinanden efter følgende Lov

$$x\,.\,p+y\,.\,q+\ldots-t=0,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(55)$$

hvor $p, q, \ldots$ ere Constanter, til hvis Bestemmelse n Observationer ere udførte, der have givet lige saamange sammensvarende Værdier for $x, y, \ldots t$. Indsætte vi disse observerede Værdier i Betingelsesligningen (55), saa erholde vi til Bestemmelsen af de ubekjendte Størrelser $p, q, \ldots$, hvis Antal naturligviis forudsættes at være mindre end n, følgende numeriske Ligninger:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot p + b_1 \cdot q + \ldots - m_1 = u_1 \\ a_2 \cdot p + b_2 \cdot q + \ldots - m_2 = u_2 \\ - - - - - - - - - - \\ a_n \cdot p + b_n \cdot q + \ldots - m_n = u_n, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

idet $u_1\, u_2 \ldots u_n$ betegne de forskjellige Feil, som hidrøre derfra, at vi tage de observerede Værdier $(a, b, \ldots m)$ istedetfor de sande Værdier af $x, y \ldots t$.

Opgaven bliver altsaa, at bestemme Constanterne $p, q, \ldots$ saaledes, at det af disse Constanter resulterende System af Feil, $u_1\, u_2 \ldots u_n$, erholder den høieste Grad af Sandsynlighed for sig; thi de Værdier for $p, q, \ldots$, som opfylde denne Betingelse, ere aabenbart de sandsynligste, som kunne findes.

Ved nu at betragte Formlerne (50) sammenlignet med (52), ved derbos at betænke, at idet vi betragte Afstanden ε imellem de i hvert enkelt Tilfælde mulige Feil som meget lille og altsaa de forskjellige Værdier af r, der angive de enkelte numeriske Ligningers forskjellige Grad af Paalidelighed, som meget store Tal, hvilke vi for de forskjellige Ligninger respective ville betegne ved $r_1\, r_2 \ldots r_n$, saa bliver det indlysende, at vi ville erholde de søgte sandsynligste Værdier for $p, q, \ldots$, naar vi sætte:

$$\begin{aligned} \psi = & \; r_1[(1+x_1)\,\mathrm{Log.}(1+x_1) + (1-x_1)\,\mathrm{Log.}(1-x_1)] \\ & + r_2[(1+x_2)\,\mathrm{Log.}(1+x_2) + (1-x_2)\,\mathrm{Log.}(1-x_2)] \\ & - - - - - - - - - - - - - - - \\ & + r_n[(1+x_n)\,\mathrm{Log.}(1+x_n) + (1-x_n)\,\mathrm{Log.}(1-x_n)], \end{aligned}$$

hvor $x_1 = \frac{u_1}{\mu}$, $x_2 = \frac{u_2}{\mu}$, ... $x_n = \frac{u_n}{\mu}$, og derpaa bestemme

p, q, ... saaledes, at $\frac{d\psi}{dp} = 0$, $\frac{d\psi}{dq} = 0$, o. s. v. Men naar vi udføre de antydede Differentiationer og altsaa bestemme Differential-Coefficienterne af ψ respective med Hensyn paa Størrelserne $p, q, \ldots$ og vi derpaa sætte enhver af disse liig Nul, da erholde vi ligesaa mange Betingelsesligninger, som der findes Ubekjendte, nemlig:

$$\left.\begin{aligned} r_1\,a_1.\log\frac{1+x_1}{1-x_1}+r_2\,a_2.\log\frac{1+x_2}{1-x_2}+\ldots r_n\,a_n.\log\frac{1+x_n}{1-x_n}=0,\\ r_1\,b_1.\log\frac{1+x_1}{1-x_1}+r_2\,b_2.\log\frac{1+x_2}{1-x_2}+\ldots r_n\,b_n.\log\frac{1+x_n}{1-x_n}=0,\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;(57)$$

etc.

idet log betegner en hvilkensomhelst Logarithme.

Antage vi nu foreløbig, at alle Feilene $x_1\,x_2\ldots x_n$ ere saa smaa, at vi kunne udelade de høiere Potentser af disse Feil i Sammenligning med den første Potents, saa reduceres Ligningerne (57) til de fra de mindste Qvadraters Methode bekjendte Betingelsesligninger:

$$\left.\begin{aligned} r_1\,a_1\,.\,u_1+r_2\,a_2\,.\,u_2+\ldots r_n\,a_n\,.\,u_n=0,\\ r_1\,b_1\,.\,u_1+r_2\,b_2\,.\,u_2+\ldots r_n\,b_n\,.\,u_n=0,\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(58)$$

etc.

hvoraf man altsaa paa almindelig Maade kan finde de tilnærmelsesviist rigtige Værdier for p, q, etc.

Hvis vi altsaa foreløbig bestemme Feilene $u_1\,u_2\ldots u_n$, ifølge de mindste Qvadraters Methode, Formlerne (58), og ved Hjælp af de saaledes fundne Værdier for $u_1\,u_2\ldots u_n$ bestemme disse Feils Grændseværdi μ, ifølge Formlerne (40), tilligemed Værdierne af følgende Factorer:

$$c_1=\frac{1}{x_1}\log\frac{1+x_1}{1-x_1},\quad c_2=\frac{1}{x_2}\log\frac{1+x_2}{1-x_2},\quad\ldots\; c_n=\frac{1}{x_n}\log\frac{1+x_n}{1-x_n},\;\;.\;(59)$$

saa indsee vi let, at Betingelsesligningerne (57) med en stor Grad af Tilnærmelse kunne skrives:

$$\left.\begin{aligned} r_1\,a_1\,c_1\,.\,u_1+r_2\,a_2\,c_2\,.\,u_2+\ldots r_n\,a_n\,c_n\,.\,u_n=0,\\ r_1\,b_1\,c_1\,.\,u_1+r_2\,b_2\,c_2\,.\,u_2+\ldots r_n\,b_n\,c_n\,.\,u_n=0,\end{aligned}\right\}\;.\;(60)$$

etc.

hvoraf man da finder de sandsynligste Værdier for de søgte Constanter $p, q, \ldots$ med samme Lethed, som ifølge de mindste Qvadraters Methode.

Jeg skal heraf fremhæve det særdeles interessante Resultat, at den sandsynligste Værdi for en ubekjendt Størrelse α, for hvilken man ved n ligegode Observationer successivt har fundet Værdierne $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n$, ikke, som man hidindtil har antaget, er udtrykt ved Middeltallet af de observerede Værdier, nemlig:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n}{n},$$

men derimod ved:

$$\alpha = \frac{c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + c_3\,\alpha_3 + \ldots c_n\,\alpha_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots c_n} \quad \ldots\ldots (61)$$

Som en Mærkelighed, der yderligere kan tjene til at belyse de sandsynlige Feils Natur, skal jeg derhos fremhæve, at i det betragtede Tilfælde, hvor vi have

$$\begin{array}{l|l}
\alpha - \alpha_1 = u_1 & \dfrac{u_1}{\mu} = x_1 \\
\alpha - \alpha_2 = u_2 & \dfrac{u_2}{\mu} = x_2 \\
\alpha - \alpha_2 = u_3 & \dfrac{u_3}{\mu} = x_3 \\
- - - - - - & - - - - \\
\alpha - \alpha_n - u_n & \dfrac{u_n}{\mu} = x_n
\end{array}$$

kan Betingelsesligningen for den sandsynligste Feil, Formel (57), exact fremstilles ved

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots(1-x_n),$$

der ogsaa kan skrives

$$\left.\begin{array}{r}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n) + (x_1\,x_2\,x_3 + x_1\,x_2\,x_4 + \ldots) \\ + (x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5 + x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_6 + \ldots) \\ + \text{etc.,}\end{array}\right\} = 0 \ \ldots \ (62)$$

hvor alle Leddene ere af ulige Grad med Hensyn paa Feilene. Denne Ligning opløst med Hensyn paa α har altsaa, eftersom n er et ulige eller et lige Tal, respective n eller $(n-1)$ Rødder, hvoraf idetmindste een er reel, og der gives saaledes efter

Formen ikke blot *een* Værdi, men meget mere respective n og $(n-1)$ Værdier for α, der have den høieste Grad af Sandsynlighed for sig. —

For at lette Beregningen har jeg til Slutning i den vedføiede Tabel angivet Værdien af Factoren $c = \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}$ svarende til en Række af Værdier for x. —

Som det vil erindres har jeg tidligere viist[1]), at man i saadanne Tilfælde, der ikke kræve den yderste Grad af Nøiagtighed, til Bestemmelsen af Constanterne p, q, ... kan betjene sig af den af mig fremstillede approximative Mindste-Qvadrant-Methode, hvis Fortrin er begrundet i dens Simpelhed; jeg troer nu paa den anden Side at have viist, at man, hvor der er Spørgsmaal om den yderste Grad af Nøiagtighed, ikke kan blive staaende ved Resultatet efter de mindste Qvadraters Methode, men bør gjennemføre Beregningen efter den her fremstillede *Methode for de sandsynligste Feil*, og jeg skal dertil endnu blot føie den Bemærkning, at det fremgaaer af det Udviklede, at man i mange Tilfælde ikke tør gjøre Regning paa større Nøiagtighed ved Anvendelsen af de mindste Qvadraters Methode end ved Anvendelsen af den approximative Methode, navnlig, naar ikke alle Størrelserne $x_1\, x_2 \ldots x_n$ ere meget smaa.

Ved de i det Foregaaende udviklede Formler vil man bemærke, at de egne sig særdeles for Beregning ved Hjælp af Logarithmer, forsaavidt vi ikke kunne finde de søgte Størrelser ved simple Additioner og Multiplicationer etc. Men da der i de fleste af disse Formler indgaaer en Factor af Formen $[i] = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots i$, saa har jeg til Slutning vedføiet en Tabel, som angiver Værdien af den briggiske Logarithme af $[i]$, svarende til en Række af Værdier af i, hvorom der hyppigst vil blive Spørgsmaal og hvorved Beregningerne betydeligt lettes. I samme Tabel har jeg desuden angivet Værdierne af den briggiske Logarithme af Stør-

[1]) Videnskab. Selsk. Oversigter for 1857, S. 52.

relsen 2^{-i}, som ligeledes finder Anvendelse ved de forekommende Beregninger. Til yderligere Lettelse har jeg endelig i samme Tabel tilføiet Værdierne for $\frac{[2n]\,2^{-2n}}{[n]\,[n]} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,\;2n}$, svarende til forskjellige Værdier af n, hvorved Beregningen ved Hjælp af Logarithmer væsentlig indskrænkes.

Anvendelsen af de i det Foregaaende udviklede Formler er saa simpel, at jeg ikke troer det nødvendigt at tilføie noget desangaaende og skal derfor indskrænke mig til at anføre et Exempel, hentet fra Nivellementet over Kjøbenhavn, som kan tjene til Sammenligning imellem Resultaterne af den her udviklede Theori af de sandsynlige Feil og den almindeligt bekjendte.

Ved at gaae ud fra Vandmærket paa Gammelholm blev blandt andet følgende Række af faste Nivellemenspunkter bestemte:

1. For Høiden af Pladen Nr. 2 paa Gammelholms Muur fandtes ved 5 Nivellementer følgende Værdier:

$a_1 = 9{,}655$ Fod o. d. V.
$a_2 = 9{,}650$ » »
$a_3 = 9{,}655$ » »
$a_4 = 9{,}663$ » »
$a_5 = 9{,}670$ » »

Middeltallet $x = \frac{48{,}293}{5} = 9{,}6586$ Fod o. d. V.

Heraf findes
$$x - a_1 = 0{,}0036$$
$$x - a_2 = 0{,}0086$$
$$x - a_3 = 0{,}0036$$
$$x - a_4 = -\,0{,}0044$$
$$x - a_5 = -\,0{,}0114$$

hvoraf $s = 0{,}0316$ og Middeltallet $\frac{s}{5} = 0{,}00632$.

For dette Tilfælde er $\frac{[2n]2-2n}{[n][n]} = 0,375 = \frac{3}{8}$, og vi finde altsaa den sandsynlige Feil ifølge den første Formel (31) at være $= \pm 0,00237$ Fod.

Beregne vi derimod den sandsynlige Feil ifølge Formlen (3), saa finde vi denne $= \pm 0,0048$.

2. Høiden af Pladen Nr. 67 paa Kongens Nytorv bestemtes derefter ved Hjælp af 5 Nivellementer; dens Beliggenhed fandtes at være $x = 9,0838$ Fod o. d. V., og Observationsfeilene fandtes at være:

$$
\begin{aligned}
x - a_1 &= -\,0,0062\\
x - a_2 &= -\,0,0022\\
x - a_3 &= -\,0,0092\\
x - a_4 &= 0,0108\\
x - a_5 &= 0,0058\\
\hline
\text{hvoraf } s &= 0,0342 \text{ og}
\end{aligned}
$$

$$\text{Middelfeilen } \frac{s}{5} = 0,00684.$$

Den sandsynlige Feil findes herefter $= \pm 0,00256$ Fod, hvorimod denne Feil, beregnet efter Formlen (3), vilde være $= \pm 0,0048$.

3. Høiden af Pladen Nr. 6, Hjørnet af Kongens Nytorv og Østergade, bestemtes herefter ved Hjælp af 6 Nivellementer; dens Beliggenhed fandtes at være $x = 13,5977$ Fod o. d. V. og Feilene vare

$$
\begin{aligned}
x - a_1 &= 0,0017\\
x - a_2 &= -\,0,0013\\
x - a_3 &= -\,0,0073\\
x - a_4 &= -\,0,0023\\
x - a_5 &= 0,0067\\
x - a_6 &= 0,0027\\
\hline
\text{hvoraf } s &= 0,0220,
\end{aligned}
$$

og i Henhold til den anden Formel (31), idet

$$\frac{s-u}{2n+2} = \frac{0{,}0220-0{,}0013}{6} = 0{,}00345 \quad \text{og} \quad \frac{[2n]2-2n}{[n][n]} = \frac{3}{8}$$

finde vi den sandsynlige Feil $= \pm\ 0{,}00127$ Fod.

Beregne vi derimod den sandsynlige Feil ifølge Formlen (3), saa finde vi denne $= \pm\ 0{,}00295$.

4. Høiden af Pladen Nr. 68 paa Hjørnet af Bredgaden og Kongens Nytorv bestemtes derefter ved Hjælp af 5 Nivellementer; dens Beliggenhed fandtes at være $x = 12{,}065$ Fod o. d. V., og Observationsfeilene vare:

$$\begin{aligned} x - a_1 &= 0{,}005 \\ x - a_2 &= 0{,}000 \\ x - a_3 &= -0{,}010 \\ x - a_4 &= 0{,}005 \\ x - a_5 &= 0{,}000 \end{aligned}$$

hvoraf $s = 0{,}020$ og

Middelfeilen $\frac{s}{5} = 0{,}004.$

Den sandsynlige Feil findes herefter $= \pm\ 0{,}0015$ Fod, imedens den efter Formlen (3) vilde være $= \pm\ 0{,}0037$ Fod.

5. For Pladen Nr. 74 i Bredgaden Nr. 190 fandt jeg paa lignende Maade af 5 Nivellementer, at Høiden over dagligt Vande var $x = 11{,}0388$ Fod samt

$$\begin{aligned} x - a_1 &= 0{,}0138 \\ x - a_2 &= -0{,}0052 \\ x - a_3 &= -0{,}0112 \\ x - a_4 &= 0{,}0078 \\ x - a_5 &= -0{,}0052 \end{aligned}$$

hvoraf $s = 0{,}0432$, $\frac{s}{5} = 0{,}00864$

og den sandsynlige Feil $= \pm 0{,}00324$ Fod, hvorimod denne efter Formlen (3) vilde være $= \pm\ 0{,}0062$ Fod.

6. For Pladen Nr. 77 i Bredgaden Nr. 179 fandt jeg derefter ved 5 Nivellementer Høiden at være $x = 9{,}6606$ Fod over dagligt Vande og Feilene at være

$$
\begin{aligned}
x - a_1 &= -0{,}0024 \\
x - a_2 &= 0{,}0066 \\
x - a_3 &= 0{,}0106 \\
x - a_4 &= -0{,}0194 \\
x - a_5 &= 0{,}0056
\end{aligned}
$$

hvoraf $s = 0{,}0446$, $\frac{s}{5} = 0{,}00892$

og den sandsynlige Feil $= \pm 0{,}00335$ Fod, hvorimod denne ifølge Formlen (3) vilde være $= \pm 0{,}0074$ Fod.

7. For Pladen Nr. 84 i Bredgaden Nr. 182 fandt jeg af 5 Nivellementer Høidebeliggenheden at være $x = 10{,}088$ Fod o. d. V. og Observationsfeilene at være

$$
\begin{aligned}
x - a_1 &= -0{,}008 \\
x - a_2 &= 0{,}017 \\
x - a_3 &= -0{,}004 \\
x - a_4 &= -0{,}002 \\
x - a_5 &= -0{,}003
\end{aligned}
$$

hvoraf $s = 0{,}034$, $\frac{s}{5} = 0{,}0068$

og den sandsynlige Feil $= \pm 0{,}00255$ Fod, hvorimod denne efter Formlen (3) vilde være $= \pm 0{,}0058$ Fod. Endelig

8. For Pladen Nr. 82, Hjørnet af Bredgaden og Toldbodveien, fandt jeg ved 4 Nivellementer, at Høidebeliggenheden var $x = 11{,}0692$ Fod o. d. V. og at Feilene vare følgende:

$$
\begin{aligned}
x - a_1 &= 0{,}0082 \\
x - a_2 &= -0{,}0018 \\
x - a_3 &= 0{,}0032 \\
x - a_4 &= -0{,}0098
\end{aligned}
$$

hvoraf $s = 0{,}0230$, og da vi i dette Tilfælde have $\frac{[2n]\,2^{-2n}}{[n][n]} = 0{,}5$ og $\frac{s-u}{2n+2} = \frac{0{,}0230 - 0{,}0018}{4} = 0{,}0053$, saa finde vi den sandsynlige Feil ved Pladen Nr. 82 imod Pladen Nr. 84 at være $= \pm 0{,}00265$ Fod, hvorimod denne Feil efter Formlen (3) vilde være $= \pm 0{,}0045$ Fod.

Beregne vi nu de sandsynlige Feil, som hefte ved Høideangivelserne for de forskjellige Nivellementsplader, ved Hjælp af de ovenfor fundne sandsynlige Feil i Høidebestemmelsen af et følgende Punkt imod det Foregaaende, saa erholde vi følgende Resultater:

Nivellements-pladens Nr.	*Den sandsynlige Feil*, beregnet, ifölge den her udviklede Theori, ved Hjælp af Formlerne (16), (25) og (31).	*Den sandsynlige Feil*, beregnet, ifølge den almindelige Theori, ved Hjælp af Formlerne (2) og (3).
2	$\pm$ 0,00237 Fod.	$\pm$ 0,0048 Fod.
67	$\pm$ 0,00256 »	$\pm$ 0,0068 »
6	$\pm$ 0,00310 »	$\pm$ 0,0074 »
68	$\pm$ 0,00322 »	$\pm$ 0,0083 »
74	$\pm$ 0,00410 »	$\pm$ 0,0103 »
77	$\pm$ 0,00488 »	$\pm$ 0,0127 »
84	$\pm$ 0,00526 »	$\pm$ 0,0140 »
82	$\pm$ 0,00569 »	$\pm$ 0,0147 »

og det viser sig heraf, at den sandsynlige Feil er betydeligt mindre end man efter den almindelige Theorie maatte antage.

Betragte vi de enkelte Høidemaalinger i et af de anførte Tilfælde, f. Ex. dem til Bestemmelsen af Pladen Nr. 2, og antage vi, at ikkun Middelfeilen $\frac{s}{r} = 0{,}00632$ og Observationens Antal $r = 5$ ere kjendte, saa ville vi dog i Henhold til Formlerne (40) (33, a) og (35, a) være istand til at bestemme, deels Grændsen for de sandsynlige Feil, deels Antallet af disse Feil, tagne gruppeviis efter Feilenes Størrelse. Ifølge Formlen (40) finde vi nemlig Grændsen for de sandsynlige Feil at være

$$\mu = \frac{8}{3} \,.\, 0{,}00632 = 0{,}01685'.$$

og naar denne Værdi indsættes i (35. a) og det derhos bemærkes, at her er $n = 2$, saa erholde vi

$$f_m = 0{,}01685 \,.\, \frac{5 - 2m}{5},$$

hvor $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ eller 5.

Indsætte vi nu efterhaanden disse Værdier for m i Udtrykket for f_m saavelsom i Udtrykket for α_m Formel (33. a) erholdes

$$\begin{array}{rlcl}
f_0 = & 0{,}01685 & \text{og} & \alpha_0 = 0{,}16 \\
f_1 = & 0{,}01011 & — & \alpha_1 = 0{,}8 \\
f_2 = & 0{,}00337 & — & \alpha_2 = 1{,}6 \\
f_3 = & -\,0{,}00337 & — & \alpha_3 = 1{,}6 \\
f_4 = & -\,0{,}01011 & — & \alpha_4 = 0{,}8 \\
f_5 = & -\,0{,}41685 & — & \alpha_5 = 0{,}16
\end{array}$$

og uden Hensyn til Fortegnet finde vi altsaa følgende Fordeling:

Feilenes Antal.	Feilenes Størrelse.		I Virkeligheden.
$2\alpha_0 = 0{,}3$	0,01685 ɔ: beliggende imellem	$\begin{cases} 0{,}02022 \\ 0{,}01348 \end{cases}$	Ingen.
$2\alpha_1 = 1{,}6$	0,01011 - — —	$\begin{cases} 0{,}01348 \\ 0{,}00674 \end{cases}$	$\begin{cases} +\,0{,}0086 \\ -\,0{,}0114 \end{cases}$
$2\alpha_2 = \underline{3{,}2}$ 5	0,00337 - — —	$\begin{cases} 0{,}00674 \\ \\ 0{,}00000 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}0036 \\ 0{,}0036 \\ -\,0{,}0044, \end{cases}$

hvoraf sees, at der er fuldstændig Overeensstemmelse med selve Forsøgenes Resultater. En ganske lignende Overeensstemmelse erholde vi for Nivellementspladen Nr. 67 og vi ville nu blot til Slutning undersøge Forholdene ved Nivellementspladen Nr. 6, idet vi ville betragte Forsøgenes Antal, $2n + 2 = 6$ og Middelfeilen $\frac{s}{2n+2} = \frac{0{,}022}{6} = 0{,}00367$, som de eneste bekjendte Størrelser. Vi bemærke strax, at vi her have $\frac{[n]\,[n]}{[2n]}\, 2^{2n} = N = \frac{8}{3}$, som indsat i Formlen (44) giver $\frac{\mu}{s} = 0{,}473$ og $\mu = 0{,}0104$, og naar Værdien for $\frac{\mu}{s}$ indsættes i (42) erholdes $u = 0{,}0013$, som netop er den Værdi for den mindste Feil, som Maalningen gav. Ifølge Formlerne (33. b), (35. b) og (37) finde vi nu let følgende Fordeling af Observationsfeilene:

Feilenes Antal.	Feilenes Størrelse.		I Virkeligheden.
$2\alpha_0 = 0{,}18$	$f_0 = \mu = 0{,}0104$ ɔ: beligg. imell.	$\begin{cases}0{,}0121\\0{,}0087\end{cases}$	Ingen.
$2\alpha_1 = 1{,}12$	$f_1 = \frac{4}{6}\mu = 0{,}0070$ - — —	$\begin{cases}0{,}0087\\0{,}0053\end{cases}$	$\begin{cases}-0{,}0073\\+0{,}0067\end{cases}$
$2\alpha_2 = 2{,}82$	$f_2 = \frac{2}{6}\mu = 0{,}0035$ - — —	$\begin{cases}0{,}0053\\0{,}0018\end{cases}$	$\begin{cases}+0{,}0027\\-0{,}0023\end{cases}$
$\alpha_3 = 1{,}88$	$f_3 = u = 0{,}0013$ - — —	$\begin{cases}0{,}0018\\0{,}0000\end{cases}$	$\begin{cases}+0{,}0017\\-0{,}0013,\end{cases}$

hvis Overeensstemmelse med Virkeligheden er indlysende.

Spørge vi om Sandsynligheden for, ved en bestemt Observation, at begaae en Feil f_m, da er denne ifølge (34) $= \frac{\alpha m}{r}$; f. Ex. Sandsynligheden for i ovenanførte Tilfælde ved en Observation at begaae en Feil $= 0{,}0035$ er $= \frac{\alpha_2}{6} = 0{,}24$; Sandsynligheden for at Feilen kun er $= 0{,}0013$ vil derimod være $= \frac{\alpha_3}{6} = 0{,}15$, og man kan altsaa vædde 24 imod 15, at Observationsfeilen vil være 0,0035 istedetfor 0,0013.

$[i] = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots i,$

i	$\log [i]$	$-\log 2^{-i}$	i	$\log [i]$	$-\log 2^{-i}$
1	0,0000000	0,3010300	31	33,9150218	9,3319300
2	0,3010300	0,6020600	32	35,4201718	9,6329600
3	0,7781513	0,9030900	33	36,9386857	9,9339900
4	1,3802113	1,2041200	34	38,4701646	10,2350200
5	2,0791813	1,5051500	35	40,0142326	10,5360500
6	2,8573326	1,8061800	36	41,5705351	10,8370800
7	3,7024306	2,1072100	37	43,1387368	11,1381100
8	4,6055206	2,4082400	38	44,7185204	11,4391400
9	5,5597631	2,7092700	39	46,3095850	11,7401700
10	6,5597631	3,0103000	40	47,9116450	12,0412000
11	7,6011558	3,3113300	41	49,5244289	12,3422300
12	8,6803370	3,6123600	42	51,1476782	12,6432600
13	9,7942804	3,9133900	43	52,7811467	12,9442900
14	10,9404084	4,2144200	44	54,4245994	13,2453200
15	12,1164997	4,5154500	45	56,0778119	13,5463500
16	13,3206197	4,8164800	46	57,7405697	13,8473800
17	14,5510686	5,1175100	47	59,4126676	14,1484100
18	15,8063411	5,4185400	48	61,0939088	14,4494400
19	17,0850947	5,7195700	49	62,7841049	14,7504700
20	18,3861247	6,0206000	50	64,4830749	15,0515000
21	19,7083440	6,3216300	51	66,1906451	15,3525300
22	21,0507667	6,6226600	52	67,9066484	15,6535600
23	22,4124945	6,9236900	53	69,6309243	15,9545900
24	23,7927057	7,2247200	54	71,3633181	16,2556200
25	25,1906457	7,5257500	55	73,1036808	16,5566500
26	26,6056190	7,8267800	56	74,8518688	16,8576800
27	28,0369828	8,1278100	57	76,6077437	17,1587100
28	29,4841408	8,4288400	58	78,3711717	17,4597400
29	30,9465388	8,7298700	59	80,1420237	17,7607700
30	32,4236601	9,0309000	60	81,9201750	18,0618000

Observationernes Antal $r=2n+1,\ r=2n+2$	n	$\frac{[2n]\ 2^{-2n}}{[n]\ [n]} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$
1 & 2	0	1,0000000
3 & 4	1	0,5000000
5 & 6	2	0,3750000
7 & 8	3	0,3125000
9 & 10	4	0,2734375
11 & 12	5	0,2460938
13 & 14	6	0,2255859
15 & 16	7	0,2094727
17 & 18	8	0,1963806
19 & 20	9	0,1854706
21 & 22	10	0,1761971
23 & 24	11	0,1681882
25 & 26	12	0,1611803
27 & 28	13	0,1549810
29 & 30	14	0,1494460
31 & 32	15	0,1444645
33 & 34	16	0,1399499
35 & 36	17	0,1358338
37 & 38	18	0,1320606
39 & 40	19	0,1285853
41 & 42	20	0,1253707
43 & 44	21	0.1223857
45 & 46	22	0,1196042
47 & 48	23	0,1170041
49 & 50	24	0,1145665
51 & 52	25	0,1122752
53 & 54	26	0,1101161
55 & 56	27	0,1080769
57 & 58	28	0,1061470
59 & 60	29	0,1043169
61 & 62	30	0,1025782

x	$c = \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}$	Differents.
0,00	0,8686	
0,05	0,8696	0,0010
0,10	0,8714	0,0018
0,15	0,8753	0,0039
0,20	0,8804	0,0051
0,25	0,8874	0,0070
0,30	0,8961	0,0087
0,35	0,9070	0,0109
0,40	0,9199	0,0129
0,45	0,9356	0,0157
0,50	0,9542	0,0186
0,55	0,9766	0,0224
0,60	1,0036	0,0270
0,65	1,0360	0,0324
0,70	1,0762	0,0402
0,75	1,1268	0,0506
0,80	1,1928	0,0660
0,85	1,2825	0,0897
0,90	1,4208	0,1383
0,95	1,6744	0,2536
1,00	∞	∞